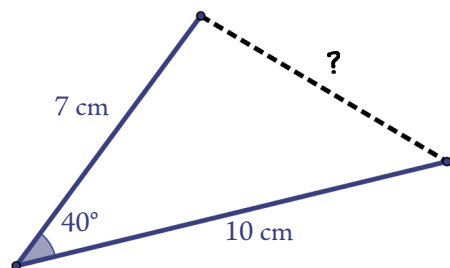


TRIGONOMÉTRIE

I. PRÉSENTATION

RÔLE

La **trigonométrie**, comme son nom l'indique, s'occupe des mesures (du grec *métron*) dans le triangle (*trigonon*). Dans un tri-angle, il y a trois angles et aussi trois côtés ; il pourrait de ce fait s'appeler aussi « trilatère¹ ». Tout cela donne six mesures, ou plus précisément six grandeurs. La trigonométrie intervient dès qu'on cherche à mettre en relation angles et longueurs, qui sont des grandeurs particulièrement **hétérogènes**². Voici une question proprement trigonométrique :



Normalement, on devrait pouvoir trouver la longueur inconnue, car on dispose de suffisamment de données. Mais en fait, non : avec les notations usuelles de l'algèbre (opérations élémentaires, puissances, racines), on ne peut pas fabriquer de formule³ qui lie

¹ Du latin *latus*, *lateris* : côté. Penser aux portes *latérales* d'une voiture. Et à *quadrilatère*, bien sûr.

² Les mots écrits avec la police **Blue Highway** sont expliqués dans le glossaire situé à la fin.

³ Pas de formule finie.

ainsi angles et longueurs. Quand je dis qu'on ne le peut pas, cela signifie non seulement que personne n'y est jamais arrivé, mais encore que personne n'y arrivera jamais, car c'est impossible ; et surtout que cette impossibilité a été démontrée, grâce notamment aux travaux du mathématicien français Évariste Galois (1811–1832).

C'est pour contourner cet obstacle qu'on a besoin du **sinus**, qui est un concept et déjà un nom, une notation, chargée de nommer cette relation informulable. Le sinus est une sorte de mesure d'angle, insolite, fondée sur des longueurs de segments. Je dis insolite, car, contrairement aux mesures habituelles, elle n'est pas proportionnelle à la grandeur qu'elle mesure : si l'on double un angle, son sinus n'est pas tout à fait doublé.

Le sinus, ou son copain le **cosinus**, ou leur parente la **tangente**, ne résolvent pas le problème du mariage des angles et des longueurs par la magie de leur seule définition : pour faire le pont entre les deux, il reste à savoir comment passer de la mesure usuelle d'un angle à sa « mesure en *sinus* ». On peut certes obtenir la *valeur exacte* du sinus de certains angles particuliers, mais le plus souvent, on ne le peut pas. Par exemple, pour un angle qui est un multiple de 3° , c'est possible, mais pour les autres mesures entières en degré, ça ne l'est pas. Ainsi, la 'seule' façon d'écrire une valeur exacte du sinus de 20° , c'est d'écrire « $\sin 20^\circ$ ». Ça vous choque ? C'est pourtant ce qui se passe déjà avec les racines : la valeur exacte de la racine de deux, c'est $\sqrt{2}$.

🔗 Mais alors, à quoi sert le sinus ?

Le fait de nommer, de noter, cette relation informulable entre les

angles et les longueurs, permet d'en faire un objet mathématique, qui servira de fondement à une *théorie*, la trigonométrie, laquelle permettra, à mesure qu'elle progressera, à coup de *théorèmes*, de mieux apprivoiser cette relation initialement insaisissable. Ce n'est pas parce que l'on bute sur une impossibilité qu'il n'y a rien à faire. En sciences, c'est même autour de telles impossibilités que se déploient certains des concepts les plus féconds. Les théorèmes de la trigonométrie servent par exemple à élaborer des algorithmes qui donnent des valeurs approchées des sinus, cosinus et tangente. Ces algorithmes sont utilisés aujourd'hui par les calculatrices.

CE QUI CHANGE AU LYCÉE

🗨 Ben déjà, je ne me souviens plus des définitions de trigo du collège, alors...

Nous les rappellerons dans le paragraphe III de ce chapitre. Pour l'instant, il s'agit juste de donner une vue d'ensemble de ce qui nous attend et qui consiste essentiellement en trois changements :

NOUVEAUX ANGLES

Le changement fondamental, c'est qu'on va étendre le champ d'action du sinus, du cosinus et de la tangente. Au collège, on ne peut prendre le sinus que d'un angle strictement compris entre 0° et 90° . Or dans certaines situations (ayant trait aux coordonnées, par exemple), on a besoin de déborder de ce cadre. La définition du collège ne le permet pas. Pour dépasser ces deux bornes, nous aurons besoin d'une nouvelle définition qui complète celle du collège.

🗨 « Ça veut dire qu'il pourra y avoir des angles négatifs ? »

— C'est en effet où je voulais en venir : nous devons commencer par fabriquer des angles d'un genre nouveau dont la *mesure* pourra être négative.

— Je ne suis pas sûr de bien comprendre...

— Normal, je n'ai pas commencé à en parler. Ne vous crispez pas trop. Posez-vous des questions, mais ne cherchez pas non plus à tout comprendre instantanément. Parfois, il vous suffira de continuer à lire : l'explication arrivera plus loin. »

NOUVELLE MESURE D'ANGLES

Un autre changement moins fondamental et qui n'a rien à voir avec le précédent, contrairement à ce qu'on pourrait croire, c'est qu'on va changer l'unité de mesure des angles : au lieu du *degré*, on prendra le **radian**, qui est l'unité angulaire favorite des mathématiciens.

NOUVEAU REGARD

On peut voir la notation « sin » comme représentant une *fonction* qui, à partir d'un angle, ou plutôt de sa mesure en radian, fournit sa « mesure en sinus ». Idem pour « cos » et « tan ». Là où l'on parlait de rapports trigonométriques, on parlera désormais de **fonctions trigonométriques**. Ce point de vue, qui invite à prendre en compte la variation, façon dont le sinus varie « en fonction » de la mesure de son angle, permet de prouver des résultats importants.

ORDRE

Pour des raisons pédagogiques plus que logiques, nous commencerons par parler de la mesure en radian, puis nous

réviserons les définitions des rapports trigonométriques du collège avant d'en arriver au cœur de notre propos, qui est d'étendre ces définitions.

II. MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

PRÉALABLE Avant d'aller plus loin, il est très fortement recommandé de lire l'article *Grandeurs*. La notion de **rapport**, notamment, y est expliquée. Elle intervient à plusieurs reprises dans ce chapitre.

PRINCIPE Le **degré** est une unité de mesure d'angle en partie **arbitraire**. On la forme en divisant l'angle plein par 360. Pourquoi 360 ? Cette division date des Babyloniens. Le 360 semble provenir à la fois de la base 60 qu'ils utilisaient (nous en gardons la trace dans notre division du temps en minutes et secondes) et de considérations astronomique (année de 360 jours environ). Le nombre 360 a aussi l'avantage mathématique d'être divisible par beaucoup d'entiers plus petits que lui.

🔗 « C'est quoi la base 60 ? »

— Une *base* est une façon de compter, d'organiser un nombre pour pouvoir le dire ou l'écrire. Nous avons l'habitude de compter en base dix⁴ ; c'est-à-dire par dizaines, centaines (qui sont des dizaines de dizaines), milliers (qui sont des dizaines de dizaines de dizaines), etc.

⁴ Cette base fut de loin la plus répandue dans l'histoire. De très nombreuses cultures l'ont adoptée sans qu'elles aient communiqué les unes avec les autres. Pourquoi dix, à votre avis ?

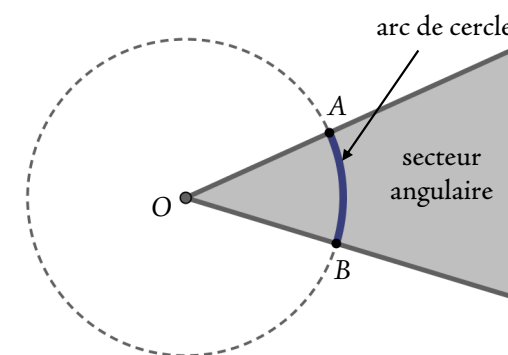
— Et quel rapport entre 360 et 60 ?

— 360 est égal à 6 fois 60. »

À priori, l'unité qui devrait venir le plus spontanément à l'esprit serait plutôt l'*angle plein* (qui correspond au tour complet). Mais il se trouve qu'en trigonométrie, c'est avec le *radian* que certaines formules deviennent les plus simples possibles⁵. On peut dire que l'angle plein est l'unité qui serait la plus « naturelle » alors que le radian est l'unité qui est mathématiquement la plus simple.

Définir cette unité n'est pas bien compliqué : on utilise un cercle centré sur le sommet du *secteur angulaire*, cercle qui va nous servir de « rapporteur théorique ».

Un **secteur angulaire** est une portion du plan délimitée par deux demi-droites de même origine. Il est recommandé de réviser le vocabulaire du collège. Voir partie *vocabulaire*, sur le site MathEnSeconde.



La première idée serait de prendre la longueur de l'arc de cercle intercepté par le secteur. Cette idée correspond à la façon

⁵ Comme des formules dites de « dérivation », étudiées en première, ou encore le « développement en série entière » du sinus, qui n'est abordé que dans les études supérieures.

traditionnelle de marquer un angle sur un dessin par un arc de cercle.

Un **arc de cercle** est une portion du cercle délimitée par deux points. Le cercle étant une ligne, l'arc de cercle en est une aussi.

Mais la longueur de cet arc de cercle ne dépend pas que de l'ouverture du secteur ; elle dépend aussi du rayon du cercle. Il faudrait s'entendre une fois pour toute sur le *rayon* de ce cercle. On pourrait prendre un rayon de *mesure* 1, dans une unité de longueur préalablement choisie. Mais alors la longueur de l'arc de cercle dépendrait quand même du choix de cette unité. Pour éliminer l'unité de longueur, on définit la mesure de l'angle comme un **rapport** : le **rapport de l'arc au rayon** du cercle (le mot « radian » vient du latin *radius* qui signifie *rayon*). Rappelons qu'il est fortement recommandé de lire l'article *Grandeurs*, où la notion de **rapport** est expliquée en détail. Elle nous servira encore dans ce chapitre.

DÉFINITION Considérons un secteur angulaire et un cercle $\mathcal{C}$ ayant pour centre le sommet O de ce secteur. Soient A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les côtés du secteur. Notons $\widehat{AB}$ l'arc du cercle $\mathcal{C}$ intercepté par le secteur. La mesure en **radian** de l'angle $\widehat{AOB}$ est le **rapport** :

$$\frac{\text{longueur de l'arc } \widehat{AB}}{\text{rayon du cercle } \mathcal{C}}$$

Ce rapport ne dépend pas du rayon choisi pour le cercle. En effet, si l'on double le rayon du cercle, la longueur de l'arc, qui lui est proportionnelle, sera doublée aussi. Le quotient, dont le

numérateur et le dénominateur auront été doublés tous deux, ne changera pas.

 Comment fait-on pour mesurer l'arc de cercle ?

Il ne s'agira pas vraiment de le mesurer sur un dessin, car cet acte de mesurer n'a jamais cours en mathématiques. Mais si par exemple on sait que le secteur a un angle de 10° , il est égal alors à $1/36^\circ$ de l'angle plein. Donc l'arc de cercle a une longueur qui est $1/36^\circ$ de celle du cercle complet. Il faut se souvenir que le périmètre du cercle est donné par la formule : $2\pi r$, où r est le rayon. La longueur de l'arc est alors égale à $\frac{2\pi r}{36}$. Si l'on veut la mesure en radian, il faudra encore diviser par le rayon. On trouve finalement $\frac{\pi}{18}$.

ANGLES USUELS

Mesure en radian de l'angle plein : $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

Mesure en radian de l'angle plat : $\frac{\pi r}{r} = \pi$

Mesure en radian de l'angle droit : $\frac{\frac{1}{2}\pi r}{r} = \frac{\pi r}{2r} = \frac{\pi}{2}$

1 RADIAN

L'unité *radian* est notée « rad ». **1 rad**, c'est l'angle qui intercepte un arc égal au *rayon*. Il est rare qu'on rencontre cet angle de 1 radian.

FRACTIONS DE π

On rencontre plutôt des mesures en radian qui s'expriment comme des fractions du nombre π , comme $\frac{2}{3}\pi$. En effet, π étant un nombre *irrationnel*, il est « incalculable » et demeure tel quel dans les expressions, où l'on finit par le voir un peu comme une unité.

On a l'habitude de le monter au numérateur de la fraction. On écrit donc « $\frac{2\pi}{3}$ », mais on le pensera plutôt comme étant deux tiers de pi.

RÉSUMÉ

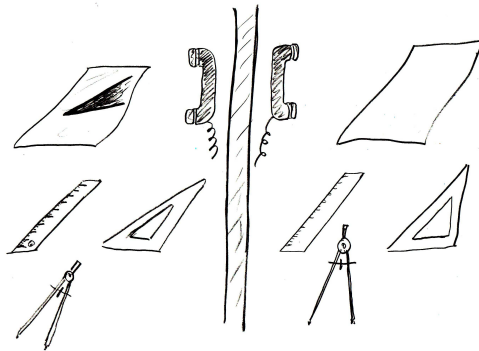
Angle plat = π rad

π est la mesure en radian de l'angle plat.

III. RAPPEL : LES RAPPORTS

TRIGONOMÉTRIQUES AU COLLÈGE

PRINCIPE « Imaginons que vous ayez devant vous un secteur angulaire, dessiné sur une feuille de papier et que vous deviez, par téléphone, dire à un interlocuteur comment le reproduire. Mais vous n'avez pas de rapporteur. Juste une règle graduée et, si vous le souhaitez, un compas et une équerre. Idem pour votre interlocuteur. On admet évidemment une part d'imprécision, puisqu'il s'agit de dessins et non de figures mathématiques.



- Je mesure l'écart entre les extrémités des côtés du secteur.
- Théoriquement, il n'y a pas d'extrémités, les côtés sont des

demi-droites. Elles ne s'arrêtent pas.

— Ben je choisis une distance au sommet. Par exemple 8 cm. Je place un point sur chaque côté à 8 cm du sommet. Et puis je mesure l'écart entre ces deux points. Mettons 3,7 cm. Après, je donne ces deux informations à celui qui doit reproduire la figure.

— Parfait. Votre interlocuteur n'a qu'à construire au compas et à la règle graduée un triangle isocèle qui a deux côtés de 8 cm et un de 3,7 cm. Puis il peut prolonger les côtés du secteur. Mais si vous devez à présent transmettre de cette façon une centaine d'angles, allez-vous transmettre à chaque fois *deux* informations ?

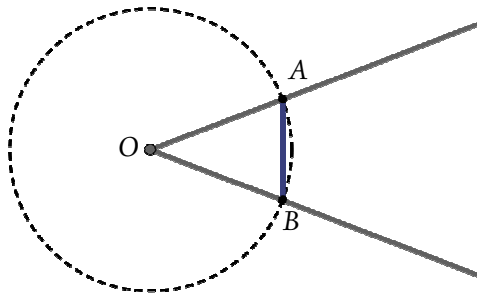
— Non, je donne la distance au sommet une fois pour toutes et je n'en change pas.

— Et si vous devez généraliser ce procédé, si vous devez faire pour toujours un choix, auquel tout le monde après vous devra se conformer quelle distance allez-vous choisir ?

— Je ne sais pas. 10 cm ?

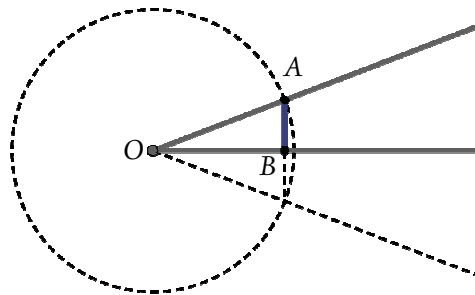
— Pourquoi pas. Le nombre mathématiquement le plus simple, ici, ce n'est pas 10, c'est 1. Mais le mieux serait encore de faire un *rapport*. »

Le but du jeu étant de caractériser un angle à partir de longueurs de segments, on peut remplacer l'arc de cercle qui nous a servi à définir le radian par une *corde* et de définir le sinus comme le rapport de cette corde, au rayon : $\frac{AB}{OA}$



Rappelons qu'une **corde** est simplement un segment qui joint deux points d'un cercle.

Le mot *sinus* est d'ailleurs un mot latin qui traduit l'arabe *djaïb* qui transcrit phonétiquement l'indien *jiva*, qui voulait dire corde. Mais il est plus commode de travailler dans un triangle rectangle que dans un triangle isocèle (notamment parce qu'on y bénéficie du théorème de Pythagore). La relation entre ce nouveau sinus et son ancêtre, c'est que l'on prend maintenant la demi-corde de l'angle double :

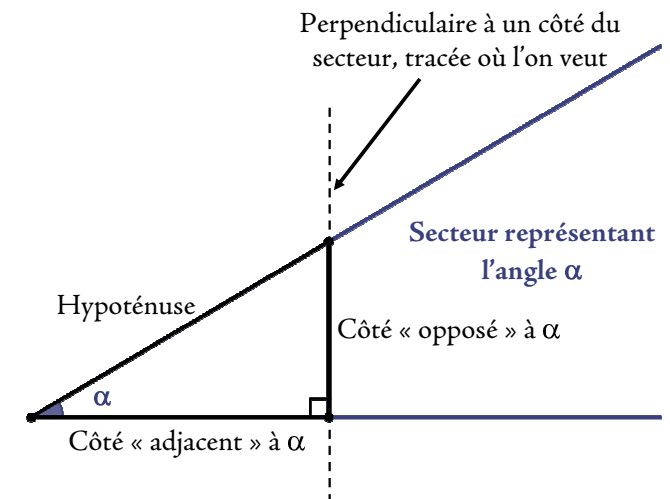


🕒 « Quoi !? Je n'y comprends rien !

— Ce n'est pas grave. C'est de ma faute, j'ai voulu trop en dire. Retenez simplement qu'on utilise un triangle rectangle au lieu d'un triangle isocèle, parce que c'est mathématiquement plus pratique. »

Ce triangle rectangle qui intervient dans la définition des **rapports trigonométriques** est seulement un moyen de caractériser un angle. Pour faire comprendre le rôle de chacun, il faudrait commencer la narration, non par le triangle rectangle, mais par l'angle :

Il était une fois un angle α (lire « alpha ») qui voulait connaître son sinus. Il fallait, pour lui répondre, utiliser des *figures*, alors que l'angle lui-même n'était qu'une *grandeur* située *nulle part*. On choisit donc, *quelque part* dans le plan, un *secteur angulaire* pour représenter cet angle. Sur les côtés de ce secteur, on construit un triangle rectangle de taille quelconque, de telle sorte que son hypoténuse et l'un des côtés de son angle droit longeassent les côtés du secteur :



Afin de pouvoir s'exprimer clairement, il fallut alors attribuer un nom à chaque côté du triangle. Le côté opposé au sommet du secteur fut tout naturellement appelé le **côté opposé**. On

s'autorisa à dire qu'il était opposé « à l'angle α » bien que ce fût un **abus de langage**. Le côté opposé « à l'angle droit », quant à lui, avait déjà un nom : **hypoténuse**. Il restait à nommer le dernier côté, qu'on appela finalement **côté adjacent**, pour dire qu'il était adjacent « à l'angle α ». *Adjacent* signifie « placé à côté de » (littéralement, en latin, *adjacens* signifie « jetté à côté de ») ; le mot est utilisé d'habitude pour désigner des secteurs angulaires qui ont un côté commun. L'idée était que le côté adjacent « touchait » le secteur. Certes, l'hypoténuse le touchait aussi, mais comme elle avait déjà un nom, elle le concéda au côté qui n'en avait pas encore. On put alors expliquer simplement à l'angle α quel était son sinus : c'était le *rapport* : $\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$.

Le sinus permettait de mettre en relation l'angle α avec le côté opposé et l'hypoténuse. Par exemple, si l'on connaissait l'angle et l'hypoténuse, grâce au sinus, on pouvait trouver le côté opposé. Mais si, avec les mêmes données, on souhaitait connaître le côté adjacent ; ou si l'on voulait mettre en relation l'angle α , le côté adjacent et le côté opposé, le travail se compliquait et il fallait déranger, en plus du sinus, le théorème de Pythagore. C'est pourquoi on inventa aussi le **cosinus** et la **tangente**. Ils vécurent tous heureux, etc.

Bien entendu, on ne peut pas raconter toute cette histoire à chaque fois qu'on énonce les définitions des rapports trigonométriques. Pour dire les choses rapidement, on est conduit à accepter de parler du triangle rectangle en premier :

DÉFINITION Dans un triangle rectangle, on considère un angle (autre que l'angle droit). On définit le sinus, le cosinus et la tangente de cet angle comme rapports de certains côtés du triangle rectangle :

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

QUESTIONS  Et ça, c'est valable seulement dans un triangle rectangle ?

— Oui.

 Pourquoi est-ce que le sinus s'appelle « sinus » et la tangente « tangente » ?

Pour le sinus, nous en avons un peu parlé. Disons que c'est une 'erreur' de traduction, ce qui fait qu'il n'y a pas de lien logique entre les sinus de la trigo. et ceux des cavités nasales.⁶

Pour ce qui est de la tangente, il y a un lien avec la droite tangente à un cercle, mais nous verrons cela plus loin.

REMARQUE Dans la définition du sinus et du cosinus, l'hypoténuse est au dénominateur. Or l'hypoténuse est le plus long côté du triangle, donc le sinus et le cosinus sont des nombres inférieurs à 1 (tandis que la tangente, elle, peut dépasser 1).

INDÉPENDANCE

Pour qu'on puisse être autorisé à parler du sinus d'un angle et non d'un triangle rectangle, il faut prouver que ce sinus ne dépend pas de la taille du triangle rectangle (ni du secteur angulaire choisi) mais seulement de l'angle α . On y arrive assez facilement par le théorème

⁶ Par ailleurs, « le nom latin de la demi-corde, *semi-inscripta*, était abrégé en s. ins. ce qui a pu surdéterminer *sinus*. » *Dictionnaire historique de la langue française*. Robert. Sous la direction d'Alain Rey.

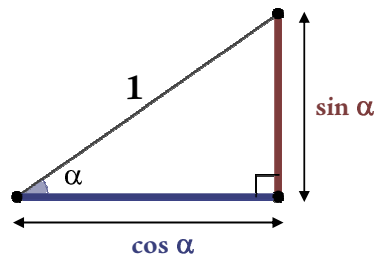
de Thalès.

(Idem pour le cosinus et la tangente.)

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

Puisque le sinus est indépendant de la taille du triangle, profitons-en pour choisir un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 1. Ou plus précisément, dont l'hypoténuse mesure 1, avec l'unité de longueur choisie dans le plan. On peut formuler les choses autrement en disant qu'on prend l'hypoténuse pour unité de longueur.

Sur un tel triangle, on peut « visualiser » le sinus et le cosinus. C'est ainsi qu'on a parfois parlé de « lignes trigonométriques ».



$$\text{côté opposé} = \frac{\sin \alpha}{1} \quad \text{donc} \quad \text{côté opposé} = \sin \alpha$$

$$\text{côté adjacent} = \frac{\cos \alpha}{1} \quad \text{donc} \quad \text{côté adjacent} = \cos \alpha$$

En appliquant à ce triangle la définition de la tangente et le théorème de Pythagore, nous obtenons nos deux premières formules trigonométriques :

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

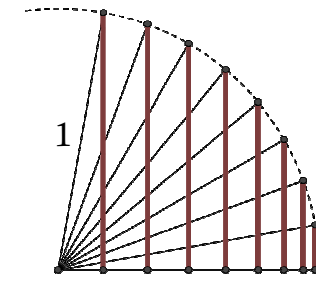
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

« $\cos^2 \alpha$ » signifie $(\cos \alpha)^2$

TABLES TRIGONOMÉTRIQUES

Reprenons le principe des *lignes trigonométriques* pour représenter les sinus des angles multiples de 10° . On peut tout représenter sur une même figure en faisant partir toutes les hypoténuses d'un même point et en 'superposant' les « côtés adjacents ». Alors, puisque ces hypoténuses ont toutes une mesure égale à 1, l'autre extrémité de ces hypoténuses se déplace sur un cercle. Sur une telle figure, on peut déjà pressentir la façon dont on **extrapolera** la définition du sinus.



En construisant cette figure méticuleusement avec une unité de longueur pas trop petite (comme le décimètre) et en mesurant non moins méticuleusement, on obtient une première **table trigonométrique**, c'est-à-dire un *tableau* qui fait le lien entre des angles et leur sinus (en valeur approché). La table ainsi obtenue est **rudimentaire** mais surtout **épistémologiquement** insatisfaisante, puisque les mathématiques n'acceptent pas qu'on mesure sur un

dessin. Néanmoins, on pourrait déjà espérer obtenir ainsi une précision au centième.

🔗 Centième de quoi ?

Centième tout court, c'est-à-dire centième de 1. N'oublions pas qu'un sinus est un nombre pur, sans unité.

Mesure en degré	Valeur approchée du sinus
10°	0,17
20°	0,34
30°	0,5
40°	0,64
50°	0,77
60°	0,87
70°	0,94
80°	0,98

On ne peut pas, disions-nous, accepter, en mathématiques, de mesurer sur un dessin. Mais on peut obtenir des tables trigonométriques bien plus complètes et précises par des formules, des raisonnements et aussi de longs calculs.

🔗 Et les valeurs approchées, en math., ça ne vous dérange pas, Monsieur l'épistémologue ?

Tant qu'on les distingue des valeurs exactes et qu'on connaît la marge d'imprécision, pas trop, non. D'autant que c'est parfois tout ce qu'on a. De plus, il faut savoir que la trigonométrie est née de questions qui n'étaient pas purement mathématiques, notamment

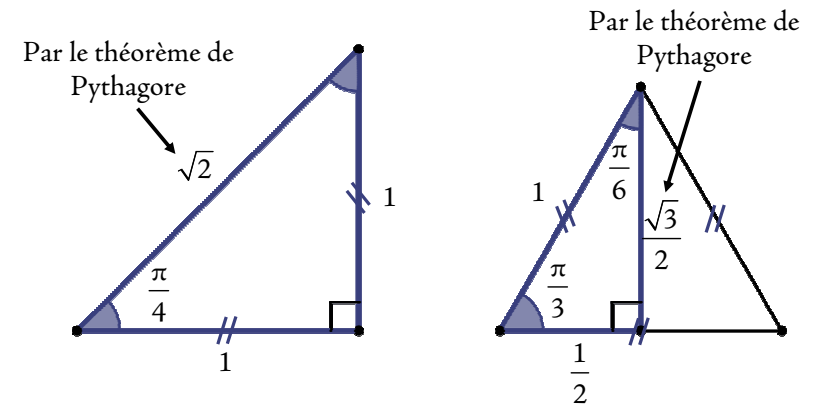
de problèmes d'astronomie (elle a aussi été utile en navigation).

C'est pourquoi ces tables ont eu un rôle important, et ce, dès les débuts de la trigonométrie. Les calculatrices, capables de refaire très vite des calculs qui étaient fort pénibles pour les humains, les ont rendus obsolètes (les calculs, pas les humains). Mais puisque vous avez l'air de préférer les valeurs exactes, en voici quelques unes :

VALEURS EXACTES À CONNAÎTRE

mesure de α en degré	30°	45°	60°
mesure de α en radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Ces valeurs se trouvent en se plaçant dans des triangles rectangles particuliers :



Par exemple, en se plaçant dans le premier triangle, rectangle isocèle, on a, par définition : $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

IV. ANGLE DE COUPLE

TERMINOLOGIE

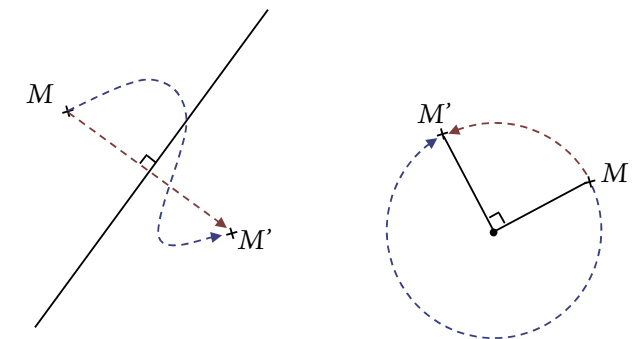
Les livres parlent parfois d'« angles orientés » pour désigner les angles de couples. Mais, comme nous le verrons par la suite, c'est la *mesure*, qui est « orientée ». Nous reprenons, ici somme souvent, la *terminologie* du *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*.

PRINCIPE

Au collège, un angle est la grandeur d'un *secteur angulaire*. Un tel angle s'appelle un **angle de secteur**. Cette grandeur caractérise une « ouverture », comme celle d'une porte. Mais on peut aussi avoir besoin de caractériser une **rotation**, c'est-à-dire le fait de tourner. Du point de vue de la rotation, l'*angle de secteur* contient à la fois trop et trop peu d'information. Si un lieutenant donne à son peloton en ordre serré l'instruction de tourner d'un quart de tour sans autre précision, l'ambiguïté de son ordre risque de créer un certain désordre au moment où il faudra que sa troupe se mette en marche. En réalité, ce n'est pas exactement le sens dans lequel tourne un soldat qui compte le plus ; car si au lieu de tourner d'un quart de tour « vers sa droite » il tourne de trois quarts de tours « vers sa gauche » (ou même d'un tour trois quarts), à la fin, son orientation sera la même et c'est cela qui importe le plus. Nous allons donc considérer que le lieutenant ferme les yeux pendant que les soldats tournent sur eux-mêmes. Il ne s'intéresse (et nous avec)

qu'à la disposition finale de ses soldats. Peu lui importe si l'envie prend à l'un d'eux de faire deux tours et quart au lieu d'un quart de tour, du moment qu'à la fin tout le monde regarde dans la même *direction* (et le même *sens*).

C'est ce qui se passe aussi pour une *rotation*, au sens mathématique du terme. En géométrie plane, une rotation est une **transformation du plan**, au même titre qu'une *symétrie* ou une *translation*, c'est-à-dire une façon d'*associer* à chaque point du plan un autre point, qu'on appelle son **image**⁷. Le mot *image* est aussi utilisé dans la même **acception** chez les fonctions. Une symétrie, une translation, une rotation 'transforment' des points là où une fonction 'transforme' des nombres, mais le principe reste le même : ce qui compte c'est le point de départ et le point d'arrivée, pas le chemin qu'on pourrait parcourir pour aller de l'un à l'autre. Ainsi, une rotation d'un demi-tour n'est rien d'autre qu'une bonne vieille symétrie centrale.

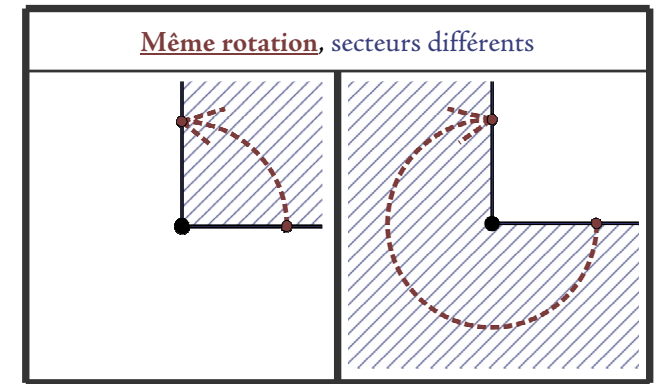
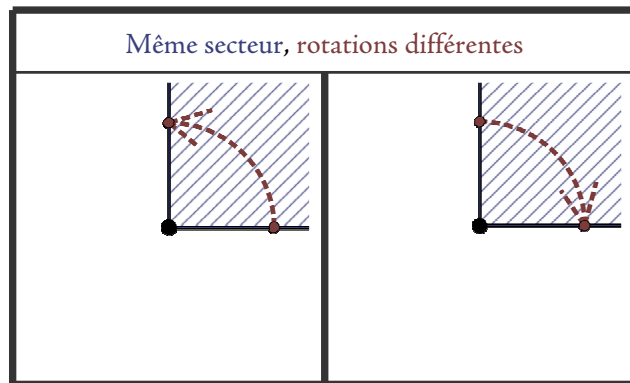


Dans une transformation, seuls comptent le départ et l'arrivée et non le chemin parcouru.

⁷ On en demande en réalité un peu plus aux transformations du plan, mais c'est ici hors sujet.

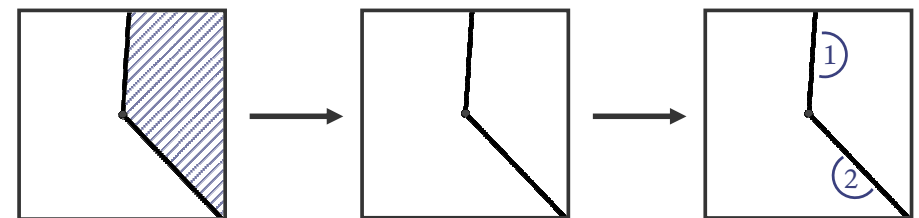
Pour déterminer une **rotation** du plan, on indique deux informations : son **centre** et son **angle**. Son *centre* est le point autour duquel on va faire tourner tous les autres points du plan. Et son *angle* est chargé de contenir toutes les informations qui restent. Il nous faudrait donc, par exemple, deux angles droits différents, correspondants aux deux quarts de tours possibles. Il sera même bien pratique, par la suite, que leurs *mesures* soient opposées. Bref, il nous faudrait un angle de $+90^\circ$ et un angle de -90° . Mais par ailleurs il faudrait que l'angle de $+90^\circ$ soit le même que celui de -270° (c'est-à-dire 3 fois, -90°).

Le secteur angulaire n'est pas la figure idéale pour fonder nos « angles de rotation » :



SECTEUR / COUPLE

Pour fabriquer un *secteur angulaire*, on commençait par prendre une *paire* de demi-droites de même origine. Elles délimitaient deux secteurs (un saillant et un rentrant). On choisissait ensuite laquelle de ces deux parties du plan on voulait « colorier ». Or cette distinction n'a plus d'intérêt du point de vue des rotations. Commençons donc par « décolorier » notre secteur : on ne distinguera plus le secteur saillant du secteur rentrant. En revanche, il est important d'indiquer laquelle des demi-droites marque le départ et laquelle marque l'arrivée. On choisit un côté « numéro 1 » et un côté « numéro 2 » :



Il faut donc, non pas prendre une *paire* de demi-droites, mais un couple de demi-droites. C'est pour cela qu'on parle d'**angle de couple**.

Pour le sens des mots **paire** et **couple**, on peut aller voir le chapitre *Ensembles*. Rappelons qu'une **paire** est un ensemble à deux éléments et que dans un ensemble, il n'y a pas d'ordre. On note une paire entre accolades. $\{a;b\}$ et $\{b;a\}$, c'est la même paire. Dans un **couple**, en revanche, l'ordre importe. On note un couple entre parenthèses : $(a;b)$ et $(b;a)$ sont deux couples différents.

ANGLE DE SECTEUR

Dans le *secteur*, les deux côtés ont un rôle similaire, en revanche, on distingue le secteur saillant du secteur rentrant. Deux *secteurs* définissent le même angle lorsqu'ils sont « superposables ».

ANGLE DE COUPLE

Dans le *couple*, on ne choisit pas entre la partie saillante et la partie rentrante, mais on distingue les deux côtés (le numéro 1 et le numéro 2 ou si l'on préfère le départ et l'arrivée).

Deux *couples* auront même angle si l'on peut, en déplaçant l'un (sans le sortir du plan pour le 'retourner'), le superposer avec l'autre, premier côté avec premier côté et second avec second.

Cette formulation est intuitive ; tout le problème, lorsqu'on veut définir en toute rigueur les angles de couples, est de formuler cette « égalité d'angle » en termes purement mathématiques. Cela demande des développements laborieux.

REPRÉSENTANT

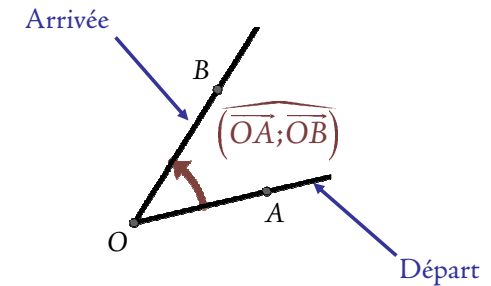
Un angle de secteur 'correspond' à une infinité de secteurs superposables entre eux. Chacun de ces secteurs est un **représentant** de cet angle.

De même, un angle de couple 'correspond' à une infinité de couples. Chaque couple est un **représentant** de l'angle en question.

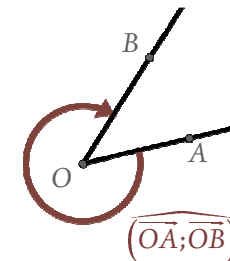
NOTATIONS L'angle du couple $([OA];[OB])$ peut se noter : $(\widehat{[OA];[OB]})$

Au lieu de définir l'angle à partir d'un couple de demi-droites, on peut tout aussi bien le définir à partir d'un couple de vecteurs (non nuls). C'est en général ce que font les mathématiciens. On trouvera donc plus souvent la notation : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$, qui en définitive revient au même. Ce qui compte, c'est la *direction* et le *sens* des vecteurs. La *norme* des vecteurs n'a pas d'importance, pas plus que n'en avait la position des demi-droites. Seuls la direction et le sens comptent vraiment.

Sur un dessin, l'angle sera marqué par un arc de cercle muni d'une flèche :



Cette flèche sert juste à « numéroté » les côtés (1-départ ; 2-arrivée) et non à orienter ! De ce fait, elle peut tourner dans l'autre sens et pourtant marquer le même angle :

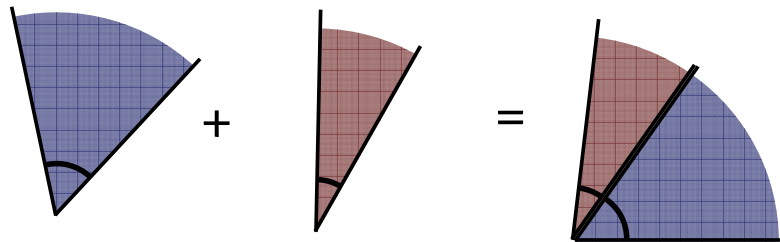


RÉCAPITULATIF

Angles de secteurs	Angles de couples

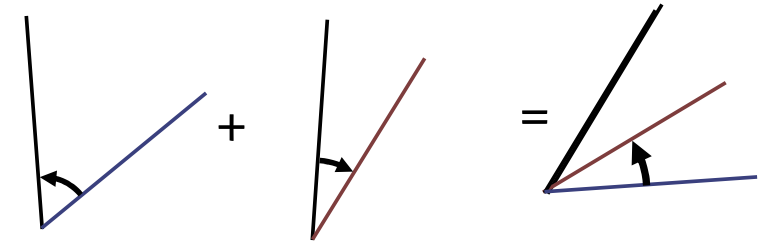
SOMME D'ANGLES DE SECTEURS

Pour additionner des angles de secteurs, on prend des représentants qu'on dispose de façon qu'ils soient adjacents. Leur réunion représente la somme.



SOMME D'ANGLES DE COUPLES

L'**addition des angles de couple** se définit de façon un peu similaire, mais en superposant l'arrivée du premier représentant avec le départ du second le côté d'arrivée du premier soit superposé au côté de départ du second. Alors, l'angle somme a pour côté de départ le départ du premier et pour côté d'arrivée l'arrivée du second.



Il faudrait démontrer que la somme obtenue ne dépend pas des *représentants* choisis, puis que cette nouvelle addition est *commutative* et *associative*. Nous l'admettrons ici.

La somme d'angles de couples est définie par la relation :

$$\overbrace{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})}^{\text{relation de Chasles}} = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$$

🕒 Ça me rappelle ce qu'on faisait avec les vecteurs...

En effet, l'addition des angles de couples est définie de façon similaire à l'addition vectorielle. Ce qu'on vient d'écrire est la **relation de Chasles** sur les angles.

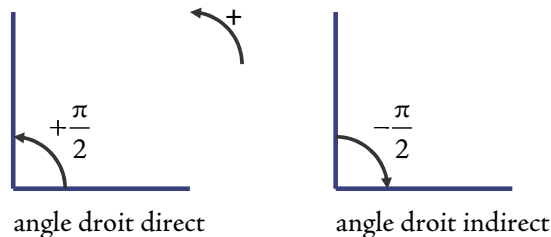
V. MESURES ORIENTÉES

D'UN ANGLE DE COUPLE

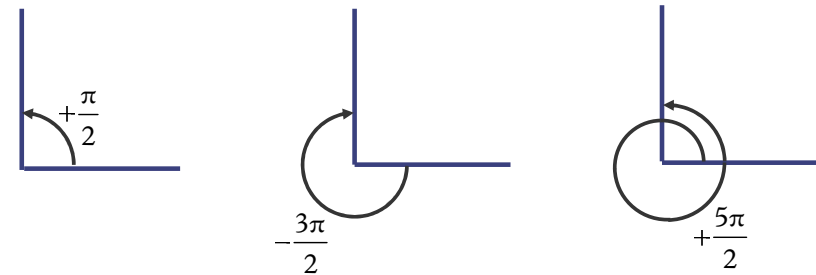
ORIENTATION

Pour *mesurer* les angles (de couple), on **oriente** tout d'abord le plan, c'est-à-dire qu'on privilégie l'un des deux sens de rotation, qui sera appelé le **sens trigonométrique**. Sur le papier, ce sens est traditionnellement représenté par le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les mesures des angles sont alors munies d'un signe : si l'on tourne dans le sens trigonométrique, la mesure est positive, sinon, elle est négative.

Pour définir rigoureusement une orientation du plan, on peut choisir **arbitrairement** l'un des deux angles droits et décréter qu'il sera l'**angle droit direct**. L'autre sera dit indirect.



LES MESURES Pour attribuer une mesure à l'angle droit direct, le plus simple est de tourner d'un quart de tour dans le sens positif, mais on peut aussi tourner de trois quarts de tours dans le sens négatif, ou de cinq quarts de tours dans le sens positif, etc.



Les mesures de l'angle droit direct sont :

$$\dots ; -\frac{7\pi}{2} ; -\frac{3\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2} ; +\frac{5\pi}{2} ; +\frac{9\pi}{2} ; \dots$$

Chaque angle a ainsi une infinité de **mesures**. C'est le prix à payer pour que l'addition sur les angles soit compatible avec l'addition classique sur leurs mesures : la somme des mesures de deux angles est une mesure de la somme de ces angles.

Pour compenser cette profusion de mesures, on en privilégie une :

LA MESURE PRINCIPALE

La mesure d'un angle donné qui a la plus petite *valeur absolue* (celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$) est appelée la **mesure principale** de cet angle.

Pour le sens du terme **valeur absolue**, voir *Révisions d'algèbre*, paragraphe *valeur absolue*. Rappelons rapidement que la valeur absolue d'un nombre relatif, c'est ce nombre, sans son signe : $+2$ et -2 ont même valeur absolue : 2.

(Attention, car la somme des mesures principales de deux angles n'est pas forcément la mesure principale de leur somme.)

CONGRUENCE

On passe d'une mesure à l'autre d'un même angle en ajoutant ou

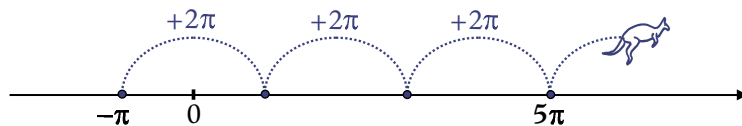
soustrayant un certain nombre de fois 2π . On dit qu'elles sont **congrues** entre elles, **modulo** 2π .

🤔 Quoi que couin ? Je comprends pas.

C'est juste une définition. Deux nombres sont dits *congrus* entre eux *modulo* 2π , lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre en faisant des bonds de 2π . C'est le cas, par exemple, de $-\pi$ et 5π : en ajoutant trois fois 2π à $-\pi$, on obtient 5π :

$$-\pi + 2\pi + 2\pi + 2\pi = 5\pi$$

L'amplitude des bonds est le *modulo*. En latin, *modus* est une mesure ou encore un rythme, une cadence. *Modulus* est un diminutif. Petite cadence. Imaginons un kangourou qui se balade sur l'axe des réels en faisant des bonds qui ont toujours la même amplitude exactement (ici, 2π). De cette façon, il tombe pile sur des nombres *congrus* entre eux, c'est-à-dire des nombres qui coïncident, qui se correspondent. Des nombres congrus entre eux sont des nombres que le kangourou peut joindre par des bonds.



Pour le sens courant de **congru**, voir le glossaire à la fin.

APPROFONDISSEMENT

Vous pouvez allègrement sauter ce paragraphe si vous n'êtes pas encore en première.

Il y a une notation pour traduire la *congruence* :

$a \equiv b [2\pi]$ se lit « a est congru à b modulo 2π ». Cette affirmation

est équivalente à : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + 2k\pi$.

On a alors : $a \text{ rad} = b \text{ rad} \Leftrightarrow a \equiv b [2\pi]$

Il faut être très prudent lorsqu'on manipule des angles dans des calculs et notamment dans des équations, pour la raison suivante :

$a \text{ rad} = b \text{ rad} \Rightarrow 2a \text{ rad} = 2b \text{ rad}$. **Mais la réciproque est fausse !** C'est pourquoi on ne peut pas diviser un angle par un nombre. « $\frac{\pi \text{ rad}}{2}$ », serait à la fois égal à $+\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ et à $-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$. On ne

peut donc pas non plus multiplier un angle par un nombre non entier.

Pour dire les choses un peu différemment :

$$2a \equiv 2b [2\pi] \Leftrightarrow \text{Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2a = 2b + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = b + \underline{\underline{k\pi}}$$

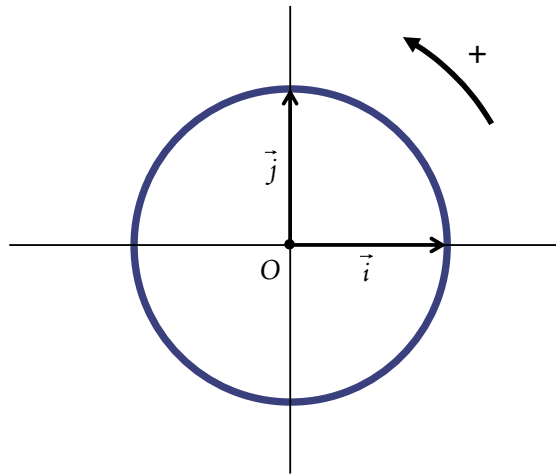
$$\Leftrightarrow a \equiv b [\underline{\underline{\pi}}]$$

VI. CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

DÉFINITION Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ **direct**, le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 et de centre O .

Rappelons qu'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est dit **orthonormé** lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont *orthogonaux* (autrement dit quand les axes sont perpendiculaires) et que, de plus, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ (autrement dit, lorsque l'unité sur chaque axe est égale à l'unité de longueur implicitement choisie dans le plan).

Un repère orthonormé est dit **direct** lorsque l'angle droit $\widehat{(\vec{i}; \vec{j})}$ est lui-même direct.



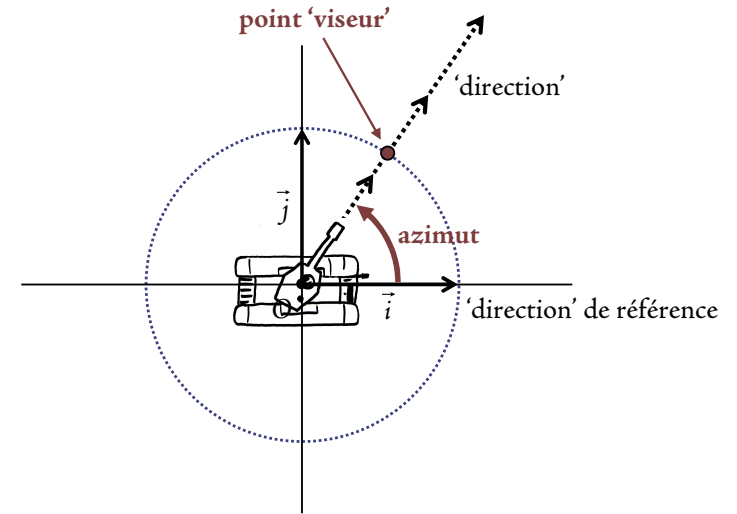
AZIMUT

Nous allons attribuer à chaque angle (de couple) un point du cercle trigonométrique (et réciproquement).

Dans les lignes qui suivent, le mot 'direction' sera utilisé dans le sens de « direction et sens ». C'est une « direction orientée ».

Pour la signification des mots **direction** et **sens**, se reporter au début du chapitre *Vecteurs*. Rappelons brièvement que des droites parallèles entre elles indiquent une même *direction*. Une fois la direction choisie, il reste deux *sens* possibles.

Sur le cercle trigonométrique, on peut considérer chaque point comme une sorte de 'viseur' pointant dans une 'direction' : celle qui va de l'origine vers le point en question.



Cette 'direction' peut aussi être caractérisée par un angle, à la condition qu'on ait choisit d'abord une 'direction' de référence, qui serait la « 'direction' zéro ». Cet angle entre la 'direction' de référence et celle désignée par le point se nomme *azimut*. Sur une boussole, la référence est le nord. Ici, la direction de référence est celle du vecteur $\vec{i}$, premier vecteur du repère (l'Est, en quelque sorte).

C'est ainsi qu'à chaque angle, on associe un unique point du cercle trigonométrique. Et de cette façon, à chaque point du cercle trigonométrique correspond aussi un seul angle. Récapitulons :

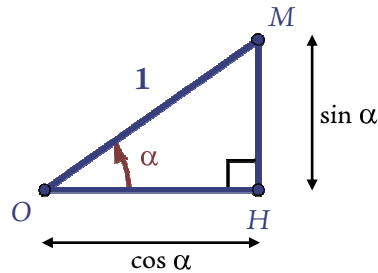
Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. À tout point M de $\mathcal{C}$, on fait correspondre l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$. L'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ s'appelle l'**azimut** du point M .

VII. LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES AU LYCÉE

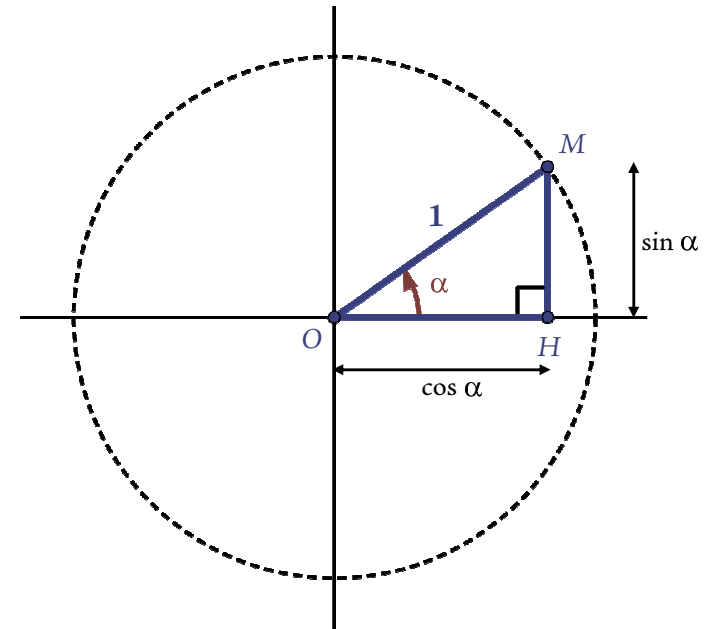
PRINCIPE

Considérons un angle α .

Dans les définitions du collège, nous avons vu que la taille du triangle rectangle utilisé n'avait pas d'influence sur les valeurs des rapports trigonométriques. Nous allons désormais, comme nous l'avons déjà fait, prendre un triangle dont l'hypoténuse a pour mesure 1. Notons OHM ce triangle, avec $\alpha = (\widehat{OH;OM})$ et H sommet de l'angle droit. Alors, comme nous l'avons vu dans le paragraphe sur les « lignes trigonométriques », la mesure du côté opposé est le sinus de α et celle du côté adjacent son cosinus :



À présent, plaçons ce triangle dans un cercle trigonométrique, de façon que O soit l'origine du repère et que H soit sur l'axe des abscisses, du côté positif (pour l'instant). M va se trouver sur le cercle :

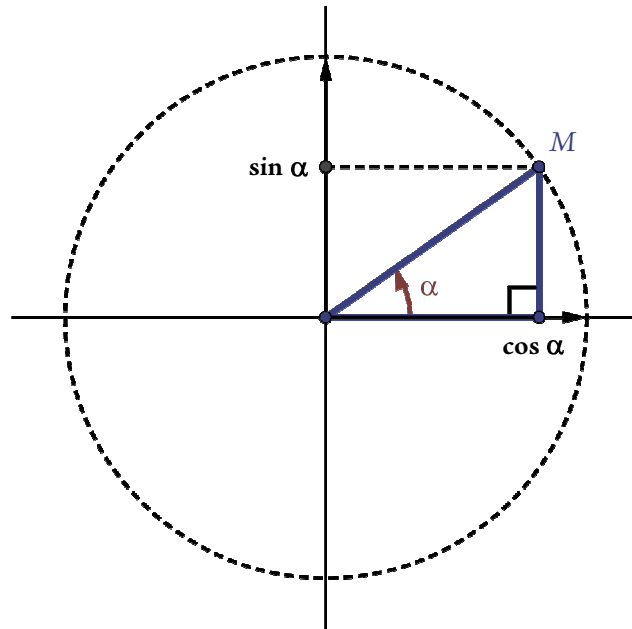


La mesure de OH est alors égale à l'abscisse de H (puisque celle-ci est positive).



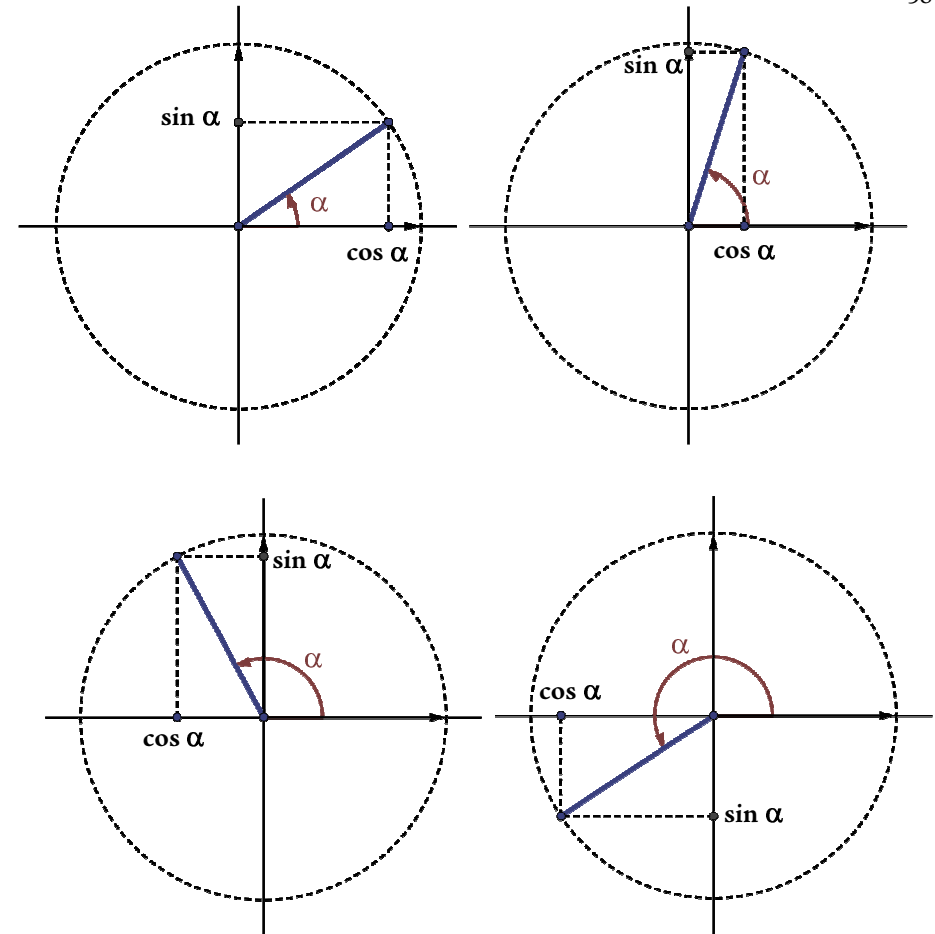
📖 Ici, je propose un petit délai de réflexion au lecteur, auquel je déconseille d'aller plus loin avant qu'il ait bien compris la phrase précédente.

La mesure de OH , disais-je, est égale à l'abscisse de H . Donc à l'abscisse de M . Par conséquent, l'abscisse du point M est le cosinus de α . De même, l'ordonnée du point M est égale au sinus de α .



Et à présent, on peut oublier le triangle rectangle. Qu'est-ce qui nous empêche, ensuite, de sortir du cadre, de « déborder du support »⁹ ? Qu'est-ce qui nous empêche de faire varier l'angle α au-delà des limites jusqu'ici autorisées ?

⁹ Référence à une réplique de Fabrice Luchini dans le film *Prof.*



🕒 « Mais alors le sinus et le cosinus peuvent être négatifs ?

— Oui. Ça vous dérange ?

— Non, mais ce tournoisement me donne un peu mal à la tête. À quoi diantre tout cela sert-il ?

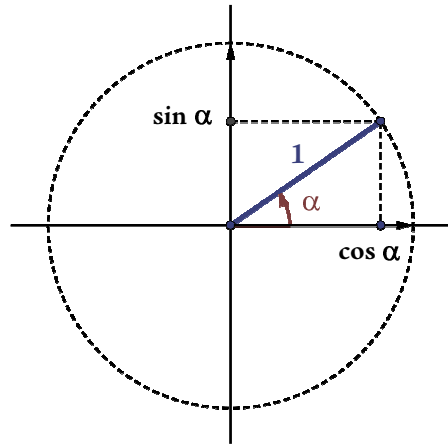
— Vous verrez bien. Apprécions plutôt, par un silence mérité, le fait que nous soyons enfin arrivés à bon port. »

DÉFINITION

Dans un repère orthonormé direct :

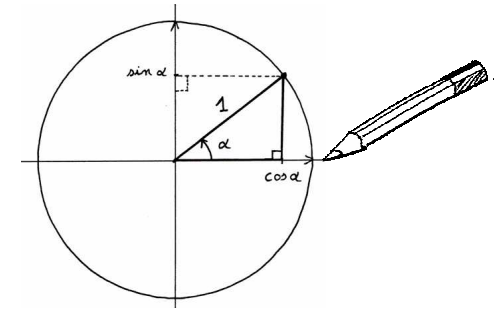
$\cos \alpha$ et **$\sin \alpha$** sont les coordonnées du point d'« azimut » α sur le cercle trigonométrique. (Respectivement abscisse et ordonnée.)

Lorsque $\cos \alpha \neq 0$, on pose : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$



Là encore, vous devez être capable de reproduire cette figure résumant la nouvelle définition, à main levée et sans l'avoir sous les yeux. Connaître un schéma ne dispense pas de mettre dessus un discours. Au contraire, c'est par les phrases qui le racontent qu'on retient le schéma.

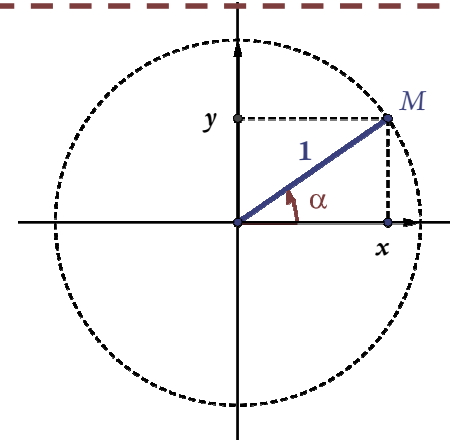
Le mot *schéma* n'est pas employé ici par hasard. En grec, *skhêma* signifie à la fois figure géométrique et figure de **rhétorique** (et plus anciennement, manière d'être).



Lorsque $\alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$, la nouvelle définition est parfaitement superposée à celle du collège. Pour mieux faire le lien entre les deux, on peut proposer une formulation un peu différente de la nouvelle définition :

Dans un repère orthonormé direct. Soit α un angle.

$M(x; y)$ étant le point d'azimut α sur le cercle trigonométrique, on pose : $\cos \alpha = \frac{x}{1}$; $\sin \alpha = \frac{y}{1}$; $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

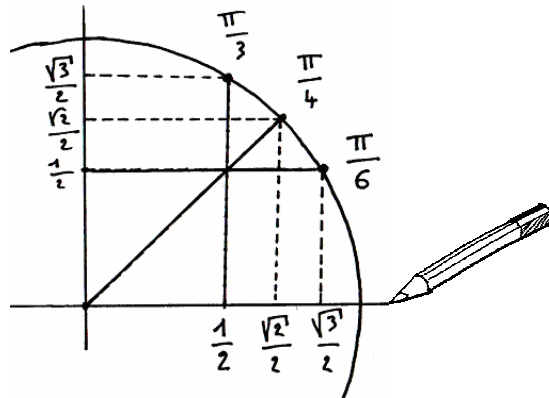


VALEURS EXACTES

On retrouve bien entendu les valeurs exactes des anciennes

définitions (auxquelles on ajoute ici les valeurs des angles qui faisaient figure de bornes dans l'ancienne définition).

mesure de α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



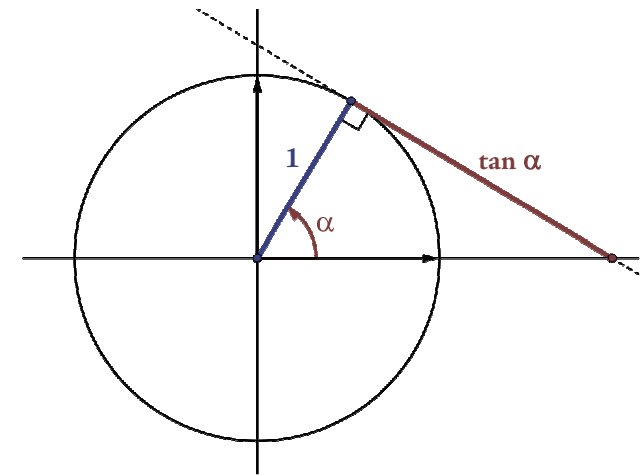
RELATION TRIGONOMÉTRIQUE

La relation trigonométrique : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ reste valable avec les nouvelles définitions.

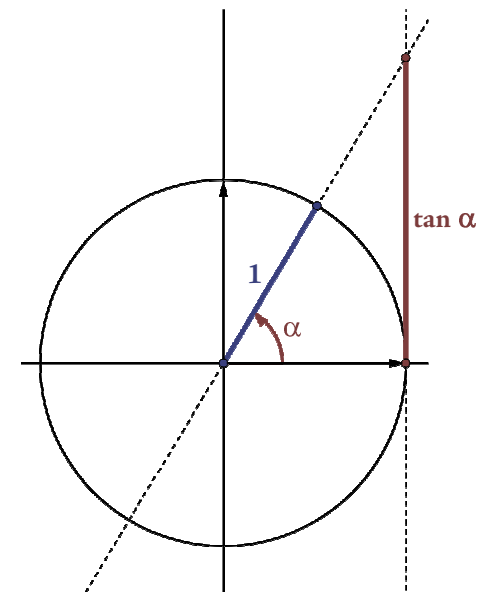
TANGENTE 🕒 Vous deviez expliquer pourquoi la tangente d'un angle s'appelle comme la tangente à un cercle...

La droite tangente au cercle trigonométrique en un point permet de représenter la tangente¹⁰ au sens trigonométrique. C'est notre troisième « ligne trigonométrique » :

¹⁰ Il semblerait que la tangente ait été inventée par le mathématicien arabe al Hasib,



Cette représentation fournit en fait la *valeur absolue* de $\tan \alpha$. En voici une autre qui fournit plus clairement une information sur le signe :



GRAND ET PETIT SINUS

Au lieu de prendre le sinus d'un *angle*, on peut s'autoriser à dire, par

une sorte d'abus de langage **entériné** par la théorie, qu'on prend le sinus d'une *mesure* d'angle, donc d'un *nombre* réel. Implicitement, on considère alors qu'on travaille toujours en radian. Donc au lieu d'écrire $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\text{rad}\right)$, on s'autorisera à écrire plus sobrement : $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Dans les années 70, au lycée, on distinguait, le « grand sinus », noté « Sin » (avec majuscule), qui était le sinus d'un angle, avec le « petit sinus », noté « sin », qui était le sinus d'un nombre. La relation entre les deux peut être formulée ainsi : $\sin(x) = \text{Sin}(x \text{ rad})$.

Idem, bien entendu, pour cosinus et tangente.

Aujourd'hui, on ne fait plus cette distinction. On peut considérer que c'est par une sorte d'abus de langage qu'on prend indifféremment le sinus d'un angle ou de sa mesure en radian.

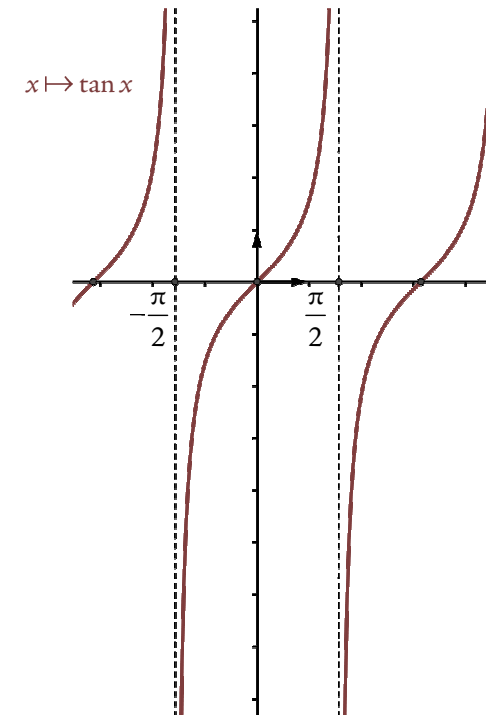
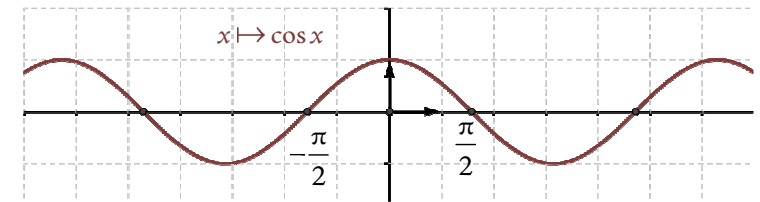
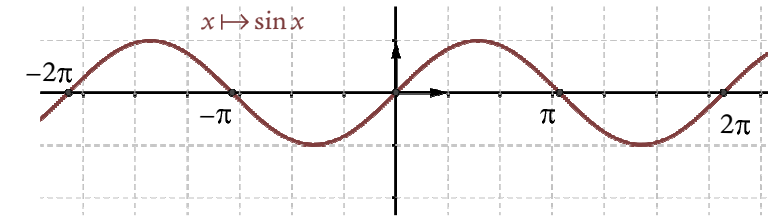
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

sin, *cos* et *tan* peuvent alors être vues comme des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ¹¹.

SINUSOÏDE

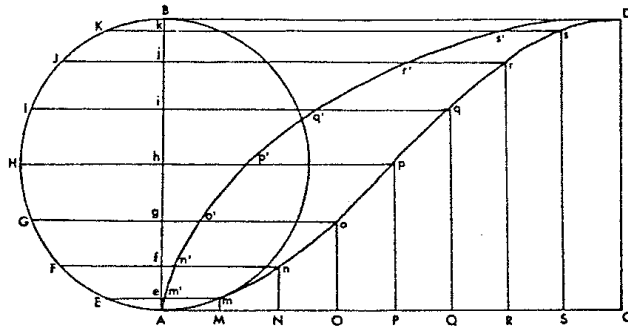
Voici les courbes de ces trois fonctions. Les courbes des fonction sinus et cosinus (dans un repère orthogonal) se nomment des **sinusoïdes**.

¹¹ La fonction *tan* est en fait définie sur $\mathbb{R}$, privé de l'ensemble des réels congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π . Pour ces valeurs en effet, le cosinus, qui est au dénominateur dans la définition de *tan*, s'annule.



🕒 Vous disiez que le sinus n'avait aucune raison de s'appeler ainsi, mais vous ne croyez pas, quand même, que c'est parce que la sinusoïde est « sinieuse » ?

Non. La sinusoïde apparaît pour la première fois chez Roberval, mathématicien français du XVII^e siècle (et elle ne s'appelait même pas encore *sinusoïde* : le terme date de 1729). Alors que le mot « sinus » est employé en latin en son sens trigonométrique dès le XII^e siècle. Ce qui est vrai, néanmoins, c'est que « sinueux » vient du latin « sinus ».



Traité des indivisibles. Roberval. Première apparition de la sinusoïde dans l'histoire des mathématiques.

VIII. GLOSSAIRE

hétérogène	De nature différente.
arbitraire	Qui dépend d'une décision individuelle (penser au <i>libre arbitre</i>). Sans nécessité.

abus de langage	Voici des exemples d'abus de langage, qui vaudront mieux qu'une longue définition : « Soit <i>M</i> un point ». On devrait dire, « Soit <i>M</i> une lettre qui <i>désigne</i> un point. » « Je vais boire une tasse de thé », pour dire : « je vais boire le <i>contenu</i> d'une tasse thé ».
extrapoler	Ce mot a été formé en mathématiques, par opposition à <i>interpoler</i> . Interpoler signifie insérer, par erreur ou fraude, des mots dans un texte. <i>Inter-</i> : entre. <i>polir</i> : rendre uni (polir). En mathématique, interpoler, c'est insérer des valeurs supplémentaires plausibles <i>entre</i> d'autres valeurs. L'idée, c'est d'essayer de trouver une fonction dont la courbe passe par certains points donnés. On peut imposer par exemple que ce soit une fonction polynôme ayant le plus petit degré possible. <i>Extrapoler</i> signifie déduire en utilisant des lois hors de leur champ d'action. Généraliser.
rudimentaire	Peu développé. Du latin <i>rudis</i> : qui n'est pas travaillé, brut, grossier. A donné <i>rude</i> .
épistémologique	Relatif à l'étude des sciences. <i>epistêmê</i> , en grec, c'est la science.
terminologie	Ensemble de termes appartenant à un domaine de connaissance ; vocabulaire.
acception	(Nom féminin.) Sens particulier d'un mot, signification.
congru	Dans la <i>congruence</i> , il y a l'idée que ça coïncide, que ça s'ajuste parfaitement. Congru vient du latin. <i>Cum</i> , avec et <i>ruere</i> , qui a donné

en français se *ruer*. Le mot est devenu rare en langue française, contrairement à *incongru*. Il subsiste dans quelques expressions comme *portion congrue*, qui signifie ressources suffisant juste à la subsistance. Il y a aussi la *grâce congrue*, qui convient aux dispositions de celui qui la reçoit et qui est accordée par Dieu sans détruire la liberté de l'homme.

rhétorique

Art (technique) de la parole.

entériner

(Même origine que *entier*.) Rendre définitif en approuvant juridiquement.